# La geometría euclidiana como medio para desarrollar habilidades de abstracción en los alumnos del nivel medio superior

# Euclidean geometry as a means to develop abstraction skills in high school students

Jorge Mario Rodríguez Moreno,[1,*] Alejandro Morales Velázquez,[1] Arlette Navarrete Cruz[1]

Recibido : 30 de septiembre de 2020 Aceptado: 28 de septiembre de 2021

**Resumen**

Sin desconocer que la esencia de la enseñanza de la geometría euclidiana es llegar a la comprensión de un sistema deductivo, esta propuesta considera que éste debe ser el punto de llegada y no el punto de partida. En los procesos de construcción de matemáticas escolares, la matemática debe asumirse desde una perspectiva cultural, como una disciplina resultado de la actividad de grupos humanos ubicados en la sociedad, en un periodo histórico y en permanente cambio. La aproximación al sistema formal axiomático deductivo ha de partir de los conocimientos intuitivos para llegar a la formalización. En este trabajo se investiga una de las problemáticas que se presenta en la educación media superior, relacionada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en general de las ciencias duras, como le llaman a la química y a la física. La problemática con la que se enfrenta el docente es como mejorar la calidad en la enseñanza de las matemáticas, generando aprendizajes significativos, la cual conduce a buscar estrategias para que, en primer lugar, se mejore la práctica docente en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje, y en segundo lugar implementar un método para que los alumnos desarrollen sus habilidades de abstracción a través de la geometría euclidiana. El trabajo se centra en la propuesta de que con la ayuda de la geometría euclidiana el docente puede lograr que los alumnos eleven sus habilidades de razonamiento, reflexionando racionalmente los problemas de su contexto, generando un aprendizaje de calidad.

PALABRAS CLAVE

Geometría euclidiana, pensamiento deductivo y crítico.

**Abstract**

Without ignoring that the essence of the teaching of Euclidean geometry is to reach the understanding of a deductive system, this proposal considers that this should be the point of arrival and not the starting point. In the construction processes of school mathematics, mathematics must be assumed from a cultural perspective, as a discipline resulting from the activity of human groups located in society, in a historical period and in permanent change. The approach to the formal deductive axiomatic system must start from intuitive knowledge to reach formalization. This paper investigates one of the problems that arises in upper secondary education, related to the teaching and learning of mathematics and, in general, of the hard sciences, as they call chemistry and physics. The problem that the teacher faces is how to improve the quality of mathematics teaching, generating significant learning, which leads to seeking strategies so that, in the first place, the teaching practice is improved in relation to the teaching process and learning, and secondly to implement a method for students to develop their abstraction skills through Euclidean geometry. The work focuses on the proposal that with the help of Euclidean geometry the teacher can get students to raise their reasoning skills, rationally reflecting on the problems of their context, generating quality learning.

KEY WORDS

Euclidean geometry, abstraction skills, levels and mathematics.

[1]Universidad Autónoma del Estado de México, México.
[*]Autor para correspondencia: jmrmtoluca@gmail.com

# Introducción

El presente trabajo plantea una investigación enfocada a resolver una problemática muy distintiva en el desarrollo de la práctica docente en la enseñanza de las matemáticas, principalmente de los docentes y alumnos del nivel medio superior de la Universidad Autónoma del Estado de México. La problemática consiste en desarrollar las habilidades de abstracción en los alumnos, para que sean pensadores críticos y reflexivos. (Rodríguez, 2000). El espacio académico en donde se realiza el proceso de investigación e intervención es el plantel Dr. Ángel María Garibay Kintana de la escuela preparatoria, en donde se trabaja con grupos del turno vespertino, correspondientes al tercer y cuarto semestres, con las asignaturas de Física I, Geometría Analítica, Física II y Cálculo Diferencial, del *Bachillerato Universitario 2015*, teniendo como asignaturas antecedentes Aritmética, Álgebra y Trigonometría, y como consecuentes Física Ondulatoria y Cálculo Integral, del sexto semestre.

La problematización es un proceso cognoscitivo (Van Hiele, 2005), que aún no ha sido claramente definido y que consiste en un ir y venir entre la formulación de preguntas y la búsqueda de respuestas que, se espera, desembocará en el planteamiento del problema. Al tomar el proceso de la problematización como punto de partida para el planteamiento de un problema, es importante demostrar que la formulación de preguntas acerca de cómo mejorar la práctica docente y al mismo tiempo mejorar la educación , es un elemento fundamental del aprendizaje y se debe analizar críticamente el punto de vista según el cual la problematización basada en una situación real puede verse como una posible forma de enseñar matemáticas que, considerando debidamente las experiencias de vida, desarrolla los conocimientos de los alumnos en este campo.

Como la investigación comienza con la percepción de la propia práctica docente a través de evidencias, de la reflexión crítica de la misma labor docente y de la experiencia adquirida en los años de servicio, es importante partir del autoconocimiento de nuestro desempeño y determinar los obstáculos que impiden el mejoramiento de esta práctica. Un obstáculo que se considera muy importante es la determinación de las posibles soluciones para abatir el índice de reprobación en las asignaturas de matemáticas de los estudiantes del nivel medio. Este representa una problemática común en los planteles de la escuela preparatoria. Desde 2003, y ahora con el nuevo currículo 2015, las autoridades universitarias han tratado de implementar acciones para disminuir el índice de reprobación, inicialmente en Álgebra, asignatura correspondiente al primer semestre del currículo, pero no se ha logrado ningún progreso.

¿Qué estrategias de enseñanza y de aprendizaje se tienen que implementar para que los estudiantes puedan ser reflexivos y comprender, razonar y aprender las matemáticas en forma fácil y significativa, para así poder resolver de manera correcta los exámenes y disminuir con ello el índice de reprobación?

# Marco Teórico

La investigación hasta ahora hecha revela un problema complejo, gracias al asesoramiento de expertos y esta reflexión, se detecta el origen de la ausencia de conocimientos previos, que es un problema cíclico, es decir, aunque el mejor docente haya impartido el curso de Álgebra y que sustente el aprendizaje en sus alumnos, en el siguiente semestre revelan que todo o al menos lo más importante se les ha olvidado. También se desecha por completo la idea del papel de los maestros que tuvieron los alumnos en secundaria, y no culpar a nadie.

Otro factor que ha influido notablemente en el problema es la forma de evaluación de los cursos. El nuevo currículo basada en competencias evalúa en el área de las matemáticas sólo 48 % del contenido procedimental, mismo que es el dominio más prioritario y delicado y al que se debe dar mayor importancia para aquellos que en el futuro pretendan realizar exámenes de admisión a las universidades. Compartiendo experiencias con docentes de otras instituciones, se encuentra, que los maestros se escudan argumentando que los alumnos vienen muy mal de la secundaria, y que sus conocimientos no les alcanzan para comprender los contenidos de las asignaturas del bachillerato.

Los maestros argumentan también que deben cubrir todos los programas y que no les da tiempo para verificar el aprendizaje. Otros, con los que el autor está de acuerdo, perciben que el problema está en que los maestros no tienen las herramientas didácticas para aplicar el constructivismo y menos aún para desarrollar competencias en los alumnos, es decir, no están correctamente capacitados. Este aspecto, es muy recurrente en la Universidad Autónoma del Estado de México, ya que no se cuenta con un programa de capacitación y evaluación previo a la asignación de una clase, sino que de repente, ya se tienen nuevos profesores porque son recomendados de algún personaje o funcionario universitario o pariente o amigo del director. Lo anterior impide aún más que se abata el índice de reprobación y se ofrezca una educación de calidad.

La identificación de la educación matemática y la didáctica de la matemática como campos académicos e investigación desde un enfoque sistémico, supera la concepción instrumental de didáctica, para situarla como campo investigativo. Una solución es buscar el equilibrio entre los procesos que tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento y la resolución de problemas y los conocimientos básicos referentes a los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, la geometría y en particular el desarrollo del pensamiento lógico deductivo, se convierte en sustrato fundamental con el cual se desarrolla la capacidad de reflexión, herramienta fundamental para explorar la realidad, representarla, explicarla, predecirla y actuar en ella como marco de referencia.

# Metodología

La estrategia para abordar la aproximación a la geometría euclidiana, como elemento básico en la formación del pensamiento deductivo. En los procesos de construcción de matemáticas escolares, la matemática debe asumirse desde una perspectiva cultural, como una disciplina resultado de la actividad de grupos humanos ubicados en la sociedad, en un periodo histórico y en permanente cambio. La aproximación al sistema formal axiomático deductivo ha de partir de los conocimientos intuitivos para llegar a la formalización. El principio que sustenta la propuesta es que, por medio de experiencias manuales significativas, se hacen descubrimientos que llevan al establecimiento de conjeturas, las cuales posteriormente se demuestran (Base de la geometría euclidiana).

¡LAS MATEMÁTICAS NO SON LA CIENCIA DE LOS NÚMEROS, SINO DEL RAZONAMIENTO!

## Supuesto de acción

Hasta el momento se ha llegado al punto de la comprensión teórica del problema y su ubicación en el contexto de la Universidad Autónoma del Estado de México, específicamente en el nivel medio superior. Reflexionando, en este momento toca establecer el supuesto de acción intencional que está ligado al modelo de intervención cualitativa necesaria para el mejoramiento de nuestra práctica. Como es evidente, el problema a resolver, como se señala en el diagnóstico y en la fundamentación del problema del presente, se resume en dos aspectos:

- ¿Cómo disminuir el índice de reprobación en el área de las matemáticas de los alumnos del nivel medio?
- ¿Qué se puede implementar para que los alumnos aprendan a pensar y reflexionar lógicamente, es decir, que sean alumnos reflexivos y desarrollen sus habilidades de abstracción y cognitivas y den orden a sus razonamientos?

La percepción es que la mayoría de los alumnos de nuevo ingreso al nivel medio, adolecen de conocimientos previos y no tienen la madurez de abstracción requerida para encarar los estudios de las matemáticas. ¿Se requiere entonces diseñar e implementar estrategias de enseñanza y aprendizaje para que los alumnos de nuevo ingreso aprendan a razonar lógicamente los planteamientos de los distintos tópicos y temas de las matemáticas?, ¿será la geometría euclidiana un camino para lograr este cometido? Se plantea que los docentes sean reflexivos y realicen acciones para que con los alumnos se tenga en claro que las matemáticas no son la ciencia de los cálculos numéricos, sino que es la ciencia del razonamiento ordenado y sistemático, elemento fundamental de la geometría euclidiana.

Aplicando el modelo de Van Hiele que es muy parecido al de Jean Piaget, ambos basados en niveles o edades, los alumnos a través de tests van desarrollando sus habilidades de abstracción. Se aplicaron a un grupo de 35 estudiantes de primer semestre tests de reactivos de diferentes niveles. Estos son básicamente problemas de diferente nivel de geometría euclidiana; desde simples conjeturas hasta el rigor de una demostración (ver Anexo 1).

## Características de los alumnos de secundaria y del Nivel Medio Superior.

Es importante tener un perfil de los patrones generales de los alumnos de secundaria y del nivel medio superior, dado que son los que ingresan a estudios del nivel medio superior, y a quienes se pretende aplicar el modelo.

Piaget clasificó los niveles de pensamiento en cuatro periodos principales:

Tabla 1. Niveles de pensamiento de Piaget.

| | Periodos | Edades |
|---|---|---|
| Periodos preparatorios prelógicos | Sensomotriz | Hasta los 2 años |
| | Preoperatorio | De 2 a 7 años |
| Periodos avanzados | Operaciones concretas | De 7 a 11 años |
| | operaciones formales | De 11 a 15 años |

Fuente: elaboración propia.

Los alumnos que cursan el nivel de secundaria se encuentran en el periodo de las operaciones formales, según Piaget las características que tienen son:

- Los alumnos empiezan a desarrollar operaciones lógicas con elementos simbólicos y abstractos. Esta característica es uno de los fundamentos de mi tesis, en este periodo hay que reforzar las habilidades de abstracción por medio de la geometría Euclidiana.
- Los alumnos pueden referirse a objetos que no le son visibles, clasificándolos en subgrupos. Por ejemplo, están en condiciones de entender "triángulo" como un término colectivo y relacionarlo con otras figuras geométricas como el cuadrado, el rectángulo, el rombo, la esfera, colores, dibujar, rasgos característicos grandes, pequeños, etc.
- Los alumnos pueden tomar decisiones como consecuencia de sus operaciones mentales abstractas. Los cálculos aritméticos del periodo sensomotriz que se llevaron a cabo sobre cantidades reales de material y objetos, pueden ser resueltos con símbolos aritméticos de cantidades. El proceso fundamental es la capacidad para operar internamente con entidades abstractas.

Los adolescentes empiezan a preocuparse de posibilidades y explicaciones probables. Comienzan a liberar su pensamiento de la preocupación por cosas reales y

comienzan a interesarse en esfuerzos por abarcar relaciones que podrían ser o no ciertas con respecto a los datos. Empiezan a proceder a tientas con respuestas posibles, y de manipulaciones de sus operaciones mentales, deducen ciertas conclusiones. Es aquí donde el modelo propuesto en la presente tesis pretende darle orden y formalidad a la lógica o forma de pensamiento del alumno.

Las operaciones formales son maneras de transformar proposiciones acerca de la realidad, de modo tal que sea posible aislar la variable pertinente y deducir relaciones entre ellas. Estas operaciones permiten a un estudiante combinar proposiciones internamente y aislar de manera abstracta las que confirmen su hipótesis, según Piaget es el sistema combinatorial de estructuras mentales del adolescente lo que lo capacita para manipular una combinación de hechos.

En la etapa concreta, los sujetos logran establecer correspondencia, pero no pueden separar las variables ni sacar conclusiones. Inhelder y Piaget manifiestan que en esta etapa es evidente que los sujetos carecen todavía de un instrumento lógico con que interpretar los datos y que el hecho de que no separen los factores no es simplemente consecuencia de pereza mental. Es convincente pensar que con la formalidad de la geometría y de la lógica formal se puede obtener ese instrumento lógico que el alumno requiere en este periodo.

La formulación de hipótesis y su comprobación (así se establece en la demostración de teoremas geométricos), forma parte esencial del pensamiento adolescente. Estos buscan explicaciones, razones y respuestas a los muchos problemas que diariamente se les plantean, y las asignaturas de la escuela, debidamente enseñadas, pueden constituir un nexo fuerte entre ellos y el ambiente en que viven. El progreso en la escuela depende mucho de la capacidad de los alumnos para pensar y los docentes deben fomentar el crecimiento intelectual en todos los niveles del trabajo escolar. Es necesario ofrecer una amplia oportunidad de actividades que promuevan operaciones mentales efectivas, que permitan desarrollar habilidades de abstracción a partir del rigor de la geometría y de la lógica formal, lo que permitirá que el alumno logre tener orden en sus razonamientos.

## Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría

Este modelo es uno de los más reconocidos para implementarse en el desarrollo de habilidades de abstracción y del pensamiento haciendo uso de la geometría euclidiana. Si comparamos la teoría piagetiana con la de Van Hiele, observaremos varias similitudes, una y otra conciben el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos como una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos hacia formas de razonamiento deductivas y abstractas. Los dos se basan en niveles de carácter recursivo. Sin embargo, presentan diferencias que hacen que el modelo de Van Hiele resulte más didáctico:

- La teoría de Piaget es una teoría del desarrollo, no del aprendizaje, por lo que no se plantea como avanzar de un nivel al siguiente, Piaget lo considera un proceso madurativo.
- Van Hiele en su preocupación por el problema didáctico de cómo ayudar a los alumnos en el ascenso de un nivel de razonamiento al siguiente, desarrolla una teoría de la enseñanza aprendizaje, no psicogenética. Da gran importancia a los contextos interactivos en el aula y al papel del profesor.
- Otra diferencia importante es el papel que Van Hiele otorga al lenguaje como estructuración del pensamiento, a cada nivel de razonamiento geométrico le corresponde un lenguaje específico.

La idea básica de partida, dicho de forma sencilla y rápida, es que “el aprendizaje de la Geometría se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento”, “que no van asociados a la edad” y “que sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente”. Es más, se señala que cualquier persona, y ante un nuevo contenido geométrico a aprender, “pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la Geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente”. El modelo es en forma análoga al de un músico y su instrumento, la base es la práctica y pasar de un nivel inferior a un nivel superior.

El modelo de Van Hiele concreta que “alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que, con un nuevo orden de pensamiento, una persona es capaz, respecto a determinadas operaciones, de aplicarlas a nuevos objetos”.

Podemos señalar entre otras que, en la base del aprendizaje de la Geometría, hay dos elementos importantes “el lenguaje utilizado” y “la significatividad de los contenidos”. Lo primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, lo segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento. Si no es así se debe esperar a que lo alcancen para enseñarles un contenido matemático nuevo.

Para terminar estos previos Van Hiele señala que “no hay un método panacea para alcanzar un nivel nuevo pero, mediante unas actividades y enseñanza adecuadas se puede predisponer a los estudiantes a su adquisición”.

## Niveles de Van Hiele: Denominación y descripción

Los niveles son cinco y se suelen nombrar con números, la más utilizada es la notación del 0 al 4. Estos niveles se denominan de la siguiente manera:

- Nivel 0: Visualización o reconocimiento
- Nivel 1: Análisis
- Nivel 2: Ordenación o clasificación
- Nivel 3: Deducción formal
- Nivel 4: Rigor

Dado que el nivel 5 se piensa que es inalcanzable para los estudiantes muchas veces se prescinde de este, además, trabajos realizados señalan que los estudiantes no universitarios, como mucho, alcanzan los tres primeros niveles. Es importante señalar que, un o una estudiante puede estar, según el contenido trabajado, en un nivel u otro distinto. A continuación, vamos a describir cuáles son las características de cada nivel.

Tabla 2. Niveles de Van Hiele

| | Elementos explícitos | Elementos implícitos |
|---|---|---|
| Nivel 0 | Figuras y objetos | Partes y propiedades de las figuras y objetos |
| Nivel 1 | Partes y propiedades de las figuras y objetos. | Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos |
| Nivel 2 | Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos | Deducción formal de teoremas |
| Nivel 3 | Deducción formal de teoremas | Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos) |

Fuente: elaboración propia.

# Resultados o aportaciones

La idea básica de partida, dicho de forma sencilla y rápida, es que el aprendizaje de la Geometría Euclidiana permite que los alumnos adquieran la habilidad para dar orden lógico a sus pensamientos y esto se hace pasando por unos determinados niveles de pensamiento y conocimiento, que no van asociados a la edad y que sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente. Es más, se señala que cualquier persona, ante un nuevo contenido geométrico a aprender, pasa por todos esos niveles y, su mayor o menor dominio de la Geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente.

Alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que, con un nuevo orden de pensamiento, una persona es capaz, respecto a determinadas operaciones, de aplicarlas a nuevos objetos.

Podemos señalar entre otras que, en la base del aprendizaje de la geometría hay dos elementos importantes "el lenguaje utilizado" y "la significatividad de los contenidos". Lo primero implica que los niveles, y su adquisición, van muy unidos al dominio del lenguaje adecuado y, lo segundo, que sólo van a asimilar aquello que les es presentado a nivel de su razonamiento. Si no es así se debe esperar a que lo alcancen para enseñarles un contenido matemático nuevo.

# Conclusiones

- Por los resultados obtenidos se puede afirmar que la geometría euclidiana en verdad sí es una herramienta o puede considerarse estrategia para desarrollar las habilidades de abstracción en los alumnos y con ello propiciar una forma de pensar ordenada y reflexiva. Es otra forma de ayudar a tener alumnos reflexivos.
- Para el grupo que experimentó durante varias semanas el estudio de la geometría y la resolución de los tests de razonamiento matemático, manifestó motivación en el aprendizaje de los conceptos expuestos del curso, al manejar sus diferentes representaciones en forma dinámica y la interacción con problemas de su contexto propició aprendizajes significativos.
- Se encontraron diferencias significativas entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes con la enseñanza tradicional y los estudiantes con la enseñanza previa de la geometría euclidiana de hasta 20 % en promedio.

# Referencias

Ángel Pérez Gómez (1990). "El profesor como profesional autónomo que investiga reflexionando su propia práctica", en John Elliot, La investigación-acción en educación. Morata. Madrid. pp. 161 S.

Kenneth M. Zeichner, (1993). "El maestro como profesional reflexivo". En Cuadernos de Pedagogía, núm. 220, monográfico "El profesorado". Diciembre. pp. 44-49.

M.L. Crowley (1987). "The van Hiele model of development of Geometric thought". En Learning and teaching geometry. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, Va. National Council of Teachers of Mathematics. Pp. 1-16.

Z. Usiskin, Van Hiele (1982). leeels and achievement in secondary school Geometry. University of Chicago. Chicago.

P. Van Hiele (1986). Structure and insight. Academic Press. New York.

# Anexo 1.

## Test del modelo de Van Hiele

1. En la siguiente figura los lados grandes y chicos son todos iguales entre si. Los lados chicos miden la mitad de los grandes. Todos los ángulos son rectos y el área de la figura es 200. ¿Cuál es el perímetro de la figura?

   **B.** 20
   **C.** 40
   **D.** 60
   **E.** 80
   **F.** 50



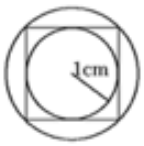
2. Me comí una ɛ un pastel redondo que representaba el 15 % del pastel, como indica la figura. ¿Cuál es ángulo que abarca la rebanada del pastel?

**G.** 15
**H.** 36
**I.** 45
**J.** 54
**K.** 60



3. Un círculo cuyo radio mide 1 cm está inscrito en un cuadrado, y éste a su vez está inscrito en otro círculo, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros mide el radio de éste último círculo?

**L.** 1
**M.** $\sqrt{2}$
**N.** 2
**O.** $\sqrt{3}$
**P.** $\sqrt{3}/2$




4. Cada lado del cuadrado ABCD mide 1 m. ¿Cuál es el área del cuadrado AKPC?

**Q.** 1 $m^2$
**R.** 1.5 $m^2$
**S.** 2 $m^2$
**T.** 2.5 $m^2$
**U.** 3 $m^2$

