Uso de la aplicación GeoGebra para la enseñanza de estadística y probabilidad en el Nivel Medio Superior

Use of the Geogebra application for the teaching of statistics and probability at the Highschool level

Rafael Morales Ibarra[1,*]

Recibido : 30 de septiembre de 2020 Aceptado: 26 de octubre de 2021

Resumen

GeoGebra es un programa dinámico de uso libre empleado para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de todos los niveles, cuenta con módulos de geometría, álgebra, análisis y estadística. La enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas históricamente se ha mitificado de ser muy complejo, sin embargo, los avances en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) surgen como una alternativa de enseñanza y aprendizaje novedoso. En el presente trabajo se presenta un escueto resumen de como emplear una de las herramientas virtuales y programa radicado en internet que facilita el entendimiento y comprensión de conceptos estadísticos teóricos y/o abstractos, tales como medidas de dispersión, caracterización de una función de probabilidad, cálculo de probabilidades empleando funciones discretas y continuas. Particularmente, se emplea a GeoGebra como herramienta estadística y probabilística para la educación media superior y superior empleando una aplicación de uso gratuito en internet y de fácil acceso desde un teléfono inteligente donde el alumno podrá tener acceso fácil y gratuito de una aplicación útil y sencilla de manejar, con lo que el alumno podrá apoyarse en clase y mejorando su aprendizaje y comprensión de temas teórico abstractos.

PALABRAS CLAVE

TIC, GeoGebra, estadística, App

Abstract

GeoGebra is a dynamic software of free use used for the teaching and learning of mathematics of all educational levels, since it has modules of geometry, algebra, probability and statistics. Teaching as the learning of mathematics has historically been mythologized as something very complex, however, today advances in Information and Communication Technologies, arise as an alternative of teaching and novel learning. This article presents a brief summary of how to use one of the virtual tools and software based on the Internet that facilitates the understanding and understanding of theoretical and / or abstract statistical concepts, such as dispersion measures, characterization of a probability function, calculation of probabilities with discrete and continuous functions. Particularly GeoGebra is used as a tool in the teaching of statistics and probability in high school and university, since it is an application of free use on the internet and easily accessible from a Smartphone, laptop or personal computer, accessing easily and free and also useful and simple to use, allowing the student to support himself in class, improving their learning and understanding of abstract theoretical topics.

KEY WORDS

GeoGebra, statistics, App.

[1]Universidad Autónoma del Estado de México, México., México.
[*]Autor para correspondencia: rmoralesi@uaemex.mx

Introducción

La dinámica del avance y crecimiento en el uso de las tecnologías al interior del aula se ha generalizado en prácticamente todos los niveles educativos, de igual manera casi ninguna área o disciplina ha dejado de lado las bondades de usar aplicaciones, programas, sistemas y equipos como herramientas auxiliares en la enseñanza académica. El uso de un programa especializado con fines didácticos en las instituciones educativas en una primera etapa se vio limitado por el costo de las licencias o membresías, en la actualidad con la aparición de distintas aplicaciones de *software* libre en internet esto ha cambiado progresivamente al irse incorporando la tecnología y equipo en la docencia de los distintos niveles educativos.

El objetivo del presente documento es mostrar como GeoGebra puede ayudar a la enseñanza y aprendizaje de la materia de estadística a nivel medio superior. Este programa gratuito, libre y de código abierto, significa que no les cuesta dinero a los centros educativos, y que los usuarios están en posibilidad de modificar sus elementos para tener una funcionalidad que no se presentan en la versión estándar. Esta aplicación no está limitada a esta área, pues cuenta con una serie de módulos de distintos temas de matemáticas, por lo que el usuario puede descargar el o los módulos de su interés para complementar el estudio de matemáticas en tiempo real en el que le imparte una clase, particularmente en la materia de estadística.

Incorporar a GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas del nivel bachillerato es viable ya que el profesor puede captar de mejor manera la atención del alumno, mientras que el alumno gana en términos de comprensión de operaciones y cálculos que vistos desde el enfoque tradicional se tornan monótonos y aburridos. Si bien el simple hecho de usar la aplicación no resuelve problemas estructurales del rezago en el área de matemáticas, si permite cautivar al alumno ya que estas herramientas hacen más atractivas e interesantes su enseñanza y además se alinean con los intereses del alumno habido del uso de las TIC que incluso a través de un teléfono inteligente podrían apoyarse en sus estudios mediante un proceso constructivo por parte del profesor cuya tarea es proporcionarle una guía al estudiante que le facilite la exploración y el descubrimiento de nuevos conocimientos (Nickerson, 1995).

Marco Teórico

Para Snir, Smith y Grosslight (1995), el uso de programas permite al estudiante percibir fenómenos que no pueden ser observados bajos condiciones normales, es decir, conceptos teóricos y abstractos, igualmente Blejec (2003) opina que el empleo del programa y simulaciones por computadora ayudan a la comprensión de conceptos teóricos y/o abstractos que en la forma tradicional representan más dificultades a los alumnos. Los escenarios virtuales por computadora los conceptos y teoremas pueden ser efectivamente demostrados a estudiantes con mínimas habilidades matemáticas o lógicas y en múltiples ocasiones puede servir para entender intuitivamente lo complejo de las demostraciones matemática.

El empleo de herramientas online en el aula se ha venido generalizando, hoy en día es común ver como el profesor emplea para su clase plataformas como Moodle, redes sociales, Rice Virtual Lab in Statistics, entre otras; y se ha demostrado que el uso de las TIC en la enseñanza resulta ser un medio útil para la explicación de conceptos matemáticos y estadísticos complicados Blejec (2003). En el pasado, la enseñanza de las matemáticas se caracterizaba por ser complicada, actualmente es difícil entender una clase de matemáticas que no emplee alguna herramienta o forma la tecnología. En la práctica se encuentra una alta correlación entre el uso de las TIC y un mejor aprovechamiento y aprendizaje por parte del alumno, e incluso algunos teóricos recomiendan el uso de las TIC en la evaluación del conocimiento. Sin embargo, aun cuando el profesor tiene la tecnología a su alcance la falta de formación y capacitación en el manejo las TIC limita el aprovechamiento de dichas herramientas. Por ello, a continuación pretendemos mostrar cómo la aplicación GeoGebra puede ayudar a las labores del docente de matemáticas para hacer su actividad más eficiente y eficaz.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) son el conjunto de herramientas relacionadas en la transmisión, procesamiento y almacenamiento digitalizado de la información que tienen un rol fundamental en el acceso universal a la educación, la igualdad en la instrucción, la enseñanza y el aprendizaje, la formación de docentes, y la gestión, dirección y administración más eficientes de un sistema educativo (Unesco, 2017). Por lo que respecta a *software* libre (en inglés *free software*), que puede entenderse como gratuito pero no necesariamente libre. Para la Free Software Foundation, se refiere a la libertad de los usuarios para ejecutar, copiar, distribuir, estudiar, cambiar y mejorar los programas; de modo más preciso, se refiere a cuatro libertades de los usuarios: la libertad de usar el programa, con cualquier propósito; de estudiar su funcionamiento; adaptarlo a las necesidades del usuario, y beneficiar a toda la comunidad disciplinar (Chance, 2007).

Suele estar disponible gratuitamente, o al precio de costo de la distribución a través de otros medios; sin embargo, no es obligatorio que esto sea así, no debe asociarse software libre a "software gratuito"-Freeware- ya que, conservando su carácter de libre, puede ser distribuido comercialmente ("software comercial"). Análogamente, el "software gratis" o "gratuito" incluye en ocasiones el código fuente; no obstante, este tipo de programas no son libres en el mismo sentido, a menos que se garanticen los derechos de modificación y redistribución de dichas versiones modificadas del programa. Tampoco debe confundirse con "software de dominio público". Éste último es aquel que no requiere de licen-

cia, pues sus derechos de explotación son para toda la humanidad, porque pertenece a todos por igual. Cualquiera puede hacer uso de él, siempre con fines legales y consignando su autoría original. Sería aquel cuyo autor lo dona a la humanidad (Chace, 2007).

El término *App* es una abreviatura de la palabra en inglés application. Es decir, es un programa, pero con unas características especiales que principalmente se refieren toda aplicación dirigida a Tablet, iPad o equipos Android, a teléfonos inteligentes. Algunas de estas podrían estar requiriendo de internet para funcionar, como Facebook o Twitter, pero en realidad son una combinación entre un programa y un *gadget*, su instalación y descarga es instantánea y directa para su uso, debido a que requieren poco espacio y su uso suele limitarse a algo muy concreto.

Particularmente, GeoGebra es un programa matemático interactivo libre para la educación en colegios y universidades, creado en 2001, escrito en Java y por tanto disponible en múltiples plataformas: Microsoft Windows, Apple macOS: 10.6 en adelante, Linux: compatible con Debian, Ubuntu, Red Hat y OpenSUSE. Android y Apple iOS: 6.0 o posterior. Es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, un compendio de matemáticas interactivo que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, pero también puede ser usado en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas (GeoGebra, 2019).

Metodología

Las bondades de GeoGebra además de su gratuidad, es la facilidad de aprendizaje, pero una de sus características más propia es su dualidad de percepción de los objetos; con su primera vista Gráfica (Geometría) y la segunda vista Algebraica (ÁlGebra), lo que permite la conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas.

Cada uno de los programas de Cálculo Simbólico (CAS), incorpora su propia hoja de cálculo, con posibilidad de animar manual o automáticamente los objetos, permitiendo incluso la creación de tablas dinámicas, para experimentar y manipular distintos elementos para diseñar rutinas que permitan obtener resultados concretos en función de los intereses del usuario.

Emplear GeoGebra en la enseñanza de la estadística a estudiantes de bachillerato pareciera no ser muy conveniente dado que existen programas especializados y de mayor potencia para el análisis estadístico más complejo, sin embargo, por las condiciones prevalecientes en el bachillerato consideramos viable la decisión emplear GeoGebra en la enseñanza. Empleando un par de ejemplos buscamos inducir a profesores y estudiantes al uso de esta aplicación con la finalidad aprovechar la tecnología que lleve a mejorar sustancialmente el aprendizaje por parte de los alumnos.

A. Ejercicio de estadística unidimensional

La siguiente base de datos (BD) corresponden a 50 registros del tiempo en meses que tardan los bebes en caminar. Se pide realizar un análisis estadístico de dicha BD con GeoGebra.

Tabla 1. Número de meses que tardan en caminar los niños menores a dos años.

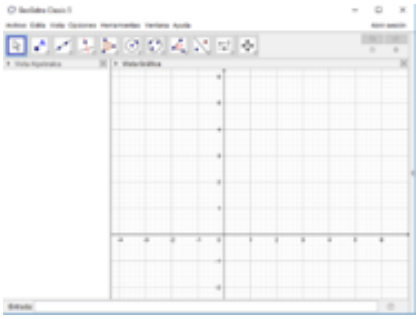
10	11	13	12	13	11	12	11	13	11
13	12	11	13	12	13	12	13	13	11
10	13	12	9	11	13	13	12	10	12
12	12	13	12	13	11	12	11	13	12
12	12	10	13	12	10	12	13	12	11

Fuente: elaboración propia.

2. Diseñar una tabla de frecuencias
3. Obtener las medidas de tendencia central (media, moda, y mediana)
4. Obtener varianza, error estándar y coeficiente de variación
5. Obtener Q1, Q3 y el P30

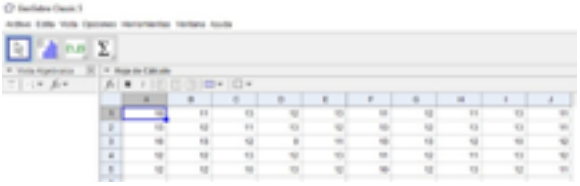
Paso 1: Abrir GeoGebra, para utilizar la hoja de cálculo, lo que equivale a que prácticamente las operaciones se realizan de forma manual, para posteriormente realizarlo con GeoGebra y notar la diferencia entre la rapidez y sencillez de utilizar esta aplicación.

Figura 1. Cuando se abre GeoGeba la primera ventana que contiene es la vista Gráfica y la vista Algebraica. Cerrando la vista Gráfica, se opta por la vista de hoja de cálculo con la que se realiza el análisis estadístico solicitado.



Fuente: elaboración propia.

Figura 2. Copiando o codificando directamente la base de datos en la hoja de cálculo, para preparar el análisis empleando datos agrupados.

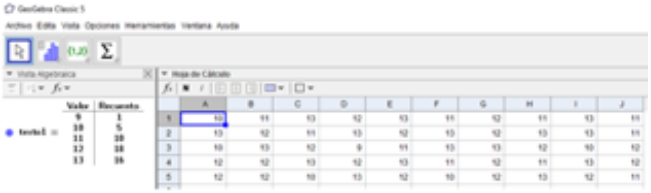


Fuente: elaboración propia.

Agrupando la base de datos (BD) con la función de GeoGebra esta tarea se hace con la función >Tabla de Frecuencia y solo es necesario determinar el rango de las celdas en las que se encuentra la BD.

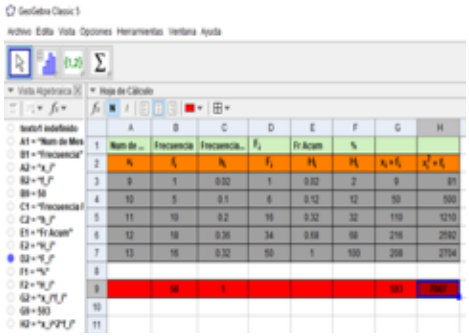
Entrada:	TablaFrecuencias(A1:J5)α

Figura 3. Al presionar <Enter> Geogebra genera la Tabla de frecuencia, con lo cual la aplicación nos ha ahorrado mucho tiempo y por lo tanto, a partir de dicha tabla estamos en posibilidad de realizar los cálculos estadísticos solicitados.



Fuente: elaboración propia.

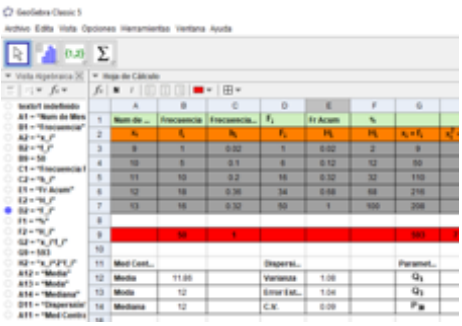
Figura 4. Empleando los datos agrupados, se procede a calcular los estadísticos que permitirán obtener las medidas de tendencia central como las de dispersión y recorrido. Estos cálculos son muy parecidos a los que se estarían realizando en una hoja de cálculo como lo es Excel o en una calculadora de mano.



Fuente: elaboración propia.

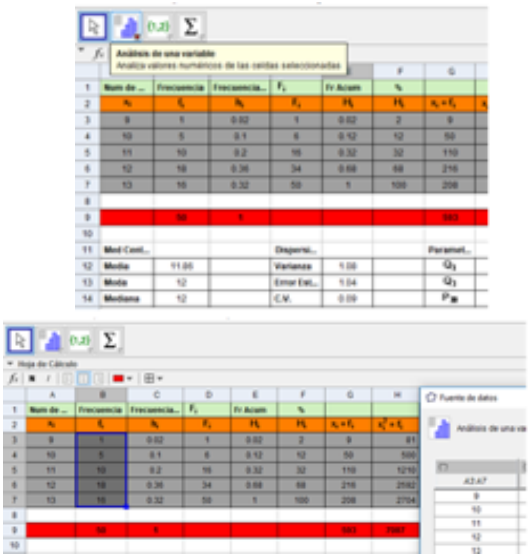
Con los datos de la Tabla 1 y conociendo las fórmulas para calcular los estadísticos muestrales se tiene:

Figura 5. Con GeoGebra, estos cálculos se realizas automáticamente. El análisis de una sola variable se hace manual, para posteriormente emplear los comandos e iconos correspondientes del programa.



Fuente: elaboración propia.

Figura 6: Análisis gráfico con GeoGebra



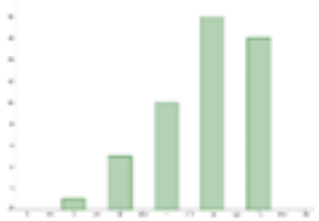
Fuente: elaboración propia.

Gráfico 1. Histograma



Fuente: elaboración propia.

Gráfico 2: Diagrama de Barras



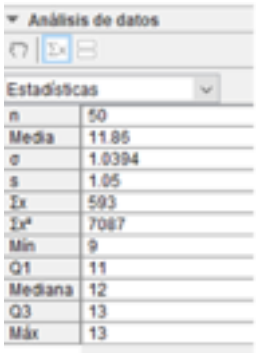
Fuente: elaboración propia.

Gráfico 3: Box-Plot o diagrama de caja



Fuente: elaboración propia.

Estadísticos solicitados



Fuente: elaboración propia.

Análisis estadístico con GeoGebra empleando la función ∑ χ que nos muestra lo siguiente:

Figura 7: Se puede ver que los resultados con cálculos manuales son iguales a los obtenidos con GeoGebra. La diferencia fue que estos últimos se obtuvieron con solo oprimir el botón Estadísticas.



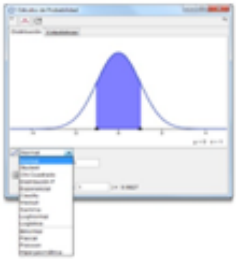
Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto, con la barra de mostrar estadísticas ∑ χ se demuestra lo fácil y sencillo que es la obtener un análisis de una determinada BD de manera precisa y rápida, con lo que podemos concluir que el empleo de la App GeoGebra ayuda en la eficiencia y eficacia en la enseñanza dentro del aula.

ii. Cálculo de probabilidades con GeoGebra

Ahora con la app abierta imploramos la >Vista Cálculo de Probabilidad dónde podemos elegir el tipo de distribución a emplear, así como los test estadísticos.

Figura 8: Vista de cálculo de probabilidades



Fuente: elaboración propia

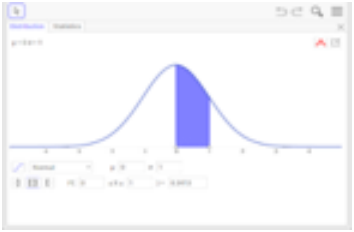
Figura 9: realización de la prueba



Fuente: elaboración propia

Con la opción Distribuciones se puede lograr graficar una variedad de distribuciones de probabilidad discreta y continua, e incluso se puedes ajustar los parámetros de la distribución. Esta app tiene la bondad de modificar gráficos cuando se desea obtener una probabilidad acumulada.

Figura 10: Calculadora de Probabilidades.

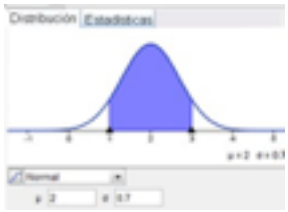


Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 2: Sea X una variable aleatoria con distribución ~N (2,0.7)

La figura 11 muestra grafica de la densidad de la distribución probabilística con los parámetros especificados:

Figura 11: Densidad de ~N (2,0.7)



Se pide:

a) Obtenga Prob[1 ≤ X ≤ 3]

Fuente: elaboración propia.

Paso 1: Seleccionar la distribución Normal en la lista desplegable, incorporando el valor de los dos parámetros conocidos μ= 2 y σ=0.7.

Paso2: Dar un clic en el icono [-] para completar con 1 y 3 los campos del intervalos con sus respectivos límite inferior y superior.

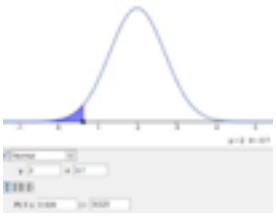


Respuesta: Prob[1 ≤ X ≤ 3] = 0.85

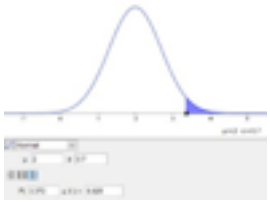
Fuente: elaboración propia.

B. Encuentre un intervalo (límite inferior y superior) con μ=2.0, tal que Prob[a≤X≤b]=0.95 Solución:

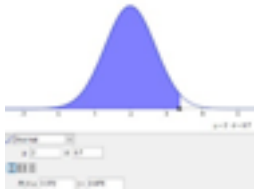
Paso 1: dar clic en icono -] y registre =0.025



Paso 2: Dar clic en el icono [- y registrar 0.025



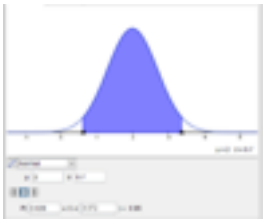
Paso 3: dar clic en -] registrar el valor de 0.975



Respuesta = [0.628, 3.372]

Comprobando:

Dar clic en el icono [-] registrando ambos límites: límite inferior=0.628 y superior 3.372



Resultados o aportaciones

Las ventajas de emplear GeoGebra como herramientas virtuales en la enseñanza de los alumnos son:

- Existe *software* de uso libre y gratuito para análisis estadístico más potentes (S, R- Project o PSPP) que comparado con GeoGebra parece abismal la diferencia, sin embargo, este es más sencillo y fácil de operar, por tanto más idóneo para alumnos de Bachillerato.
- GeoGebra es más amigable comparado con programas estadísticos disciplinares, al ser más complejo su manejo los hace inaccesibles para estudiantes de Bachillerato.
- Los manuales de instalación y de capacitación se encuentran en español.
- Exporta figuras a formato web con absoluta facilidad,
- El profesor puede utilizar construcciones y códigos ya creadas por otros usuarios para, diseñar materiales didáctico estáticos o dinámicos que complementen las explicaciones de la materia de estadística.
- Entre los inconvenientes de GeoGebra se encuentra el hecho de que para poder hacer aportes se requieren conocimientos de programación JAVA con lo que algunos profesores pueden ser reticentes a su uso, y su modificación y/o creación.

Conclusiones

GeoGebra permite abordar temas de geometría, algebra, cálculo, probabilidad y estadística de manera dinámica e interactiva, lo que hace que el alumno pueda apreciar los contenidos matemáticos de manera activa haciendo el aprendizaje de las matemáticas mucho más fácil.

Con un par de ejercicios hemos pretendido mostrar lo sencillo, fácil y útil que es usar GeoGebra en la enseñanza de matemáticas, en específico de la materia de Estadística a nivel medio superior. De este modo, es deseable que tanto profesor como estudiante se acerquen al programa, el primero con fines de actualización en el uso de las TIC en el aula, mientras que para el alumno aprenda a utilizarlo de manera habitual en sus materias de matemáticas desde un programa instalado en una computadora o desde su propio teléfono inteligente con la finalidad de mejorar su aprendizaje en estas áreas de las matemáticas.

Referencias

Blejec, A. (2003). Teaching statistics by using simulations on the Internet. IASE Satellite Conference on Statistics, Berlin, Germany.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). "The role of technology in improving student learning of statistics". En Technology Innovations in Statistics Education, 1 (1).

GeoGebra. (2013). Página web de GeoGebra. Disponible en http://www.geogebra.org/cms/ Recuperado el 18 de febrero 2019.

Nickerson, R. S. (1995). "Can technology help teach for understanding". En eds. D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, and M. S. Wiske, Software goes to school: teaching for understanding with new technologies, New York: Oxford University Press.

Snir, J., Smith, C. y Grosslight, L. (1995). Conceptually enhanced simulations: a computer tool for science teaching. In eds. D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, and M. S. Wiske, Software goes to school: teaching for understanding with new technologies, New York: Oxford University Press.